P-ISSN : 2339-2444
E-ISSN : 2549-8401
Jurnal Karya Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Semarang
A University For The Excellence

REGULARITAS DAN RELASI GREEN PADA SEMIGRUP TRANSFORMASI LINEAR PARSIAL INJEKTIF DENGAN RESTRIKSI RANGE

Ade Ima Afifa Himayati
Universitas Muhammadiyah Kudus

Article history

Keywords: *Regularity, Green relation, Semigroups, Linear Transformation, Injevtive, Restricted Range*

Abstract

Injective partial linear transformations in the vector space V and the function composition operations form semigroups called semigroups of injective partial linear transformations denoted by I (V). Suppose Z is a subspace in a vector space V, then the set of all members of I (V) whose function results are contained in Z to the function composition operation is also a semigroup denoted by I (V, Z) which is called a semigroup of injectable partial linear transformations with range restrictions. . In this article, we will examine how the characteristics of regular elements and the characteristics of two set members in I (V, Z) are related to Green using the literature study method. The results of the research in this article are the necessary and sufficient conditions needed so that any element is called a regular element and the characteristics of the two members of the set I (V, Z) are related.

Pendahuluan

Himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang assosiatif adalah semigrup .(Clifford, A.H, Preston G.B, 1961) Himpunan semua transformasi terhadap operasi komposisi fungsi merupakan salah satu contoh semigrup yang disebut semigrup transformasi penuh yang dinitasikan dengan $T(X)$ (Clifford, A.H, Preston G.B, 1961). Semigrup transformasi penuh dikembangkan dengan mengganti himpunan X dengan himpunan ruang vektor V sehingga membentuk suatu semigrup baru yang disebut semigrup transformasi linear penuh dan dinotasikan dengan $T(V)$ (Sullivan, 2005). Pada transformasi linear penuh dikembangkan menjadi semigrup transformasi linear parsial yang dinotasikan dengan $PT(V)$(Sanwong & Sommanee, 2008)

Semigrup transformasi linear parsial $PT(V)$ dapat dibentuk suatu subsemigrup yang menghimpun semua transformasi linear parsial yang hasil transformasinya berada pada suatu subruang tertentu yang dimisalkan

Z, terhadap operasi komposisi fungsi disebut semigrup transformasi linear parsial dengan restriksi range dan dinotasikan dengan $PT(V, Z)$ (Sangkhanan & Sanwong, 2012) . Dalam artikel ini akan diambil sub semigrup dari $PT(V, Z)$ yang menghimpun semua transformasi linear parsial injektif dengan restriksi range yang dinotasikan dengan $I(V, Z)$.

Dalam penulisan $\alpha \in I(V, Z)$ misalkan $B_\alpha = \{a_i | i = 1,2, \dots, n\}$ adalah basis pada $dom(\alpha)$, dapat ditulis untuk setiap $\alpha \in PT(V)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha(a_1) & \alpha(a_2) & \dots & \alpha(a_n) \end{pmatrix}$$

dengan $\alpha(a_i) \in I(V, Z)$. Penulisan elemen $I(V, Z)$ sebagai secara penuh, maka untuk setiap $x \in \overline{dom(\alpha)}$, $\alpha(x) = \emptyset$ dengan $\overline{dom(\alpha)}$ adalah elemen selain di $dom(\alpha)$ dan tidak ditulis. Hasil dari pemetaan dari $\alpha \in I(V, Z)$ adalah $\alpha(V)$ yang termuat di Z, sehingga jelas bahwa $\alpha(V)$ subruang di Z.

Suatu semigrup S dapat dibangun konsep ideal kiri, ideal kanan dan ideal jika terdapat suatu himpunan bagian L dari semigrup S berlaku SL termuat di L untuk ideal kiri dan LS termuat di L untuk ideal kanan dan jika berlaku ideal kiri dan ideal kanan maka dikatakan ideal. Konsep ideal dan relasi ekuivalensi, oleh Green dikembangkan menjadi sebuah definisi relasi Green. Konsep relasi Green pertama kali dikenalkan oleh J.A Green menyebutkan beberapa relasi yaitu relasi $\mathcal{R}$ relasi $\mathcal{L}$, Relasi $\mathcal{J}$, Relasi $\mathcal{D}$ dan relasi $\mathcal{H}$(Green, 1951).

Relasi Green dapat berlaku pada sembarang semigrup dengan karakteristik yang berbeda beda pada setiap semigrup yang berbeda. Sangkanan dan Sangwong pada penelitian sebelumnya telah membahas karakteristik relasi Green pada semigrup transformasi linear dengan restriksi range yang selanjutnya dikembangkan oleh Yanisa chaiya (Chaiya et al., 2019) . Dalam artikel ini, akan dibahas karakteristik relasi Green pada subsemigrup transformasi linear parsial dengan restriksi range yaitu semigrup transformasi linear parsial injektif dengan restriksi range.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan penulis dalam penulisan artikel ini adalah dengan menggunakan studi literatur berkaitan dengan regularitas, dan relasi Green semigrup transformasi linier parsial injektif dengan restriksi *range*. Penelitian ini dimulai dengan mempelajari beberapa pengertian dasar di dalam semigrup secara umum beserta sifatnya, seperti mengenai elemen reguler, ideal utama, relasi Green. Setelah itu dilanjutkan dengan mendalami contoh dari semigrup khusus yaitu semigrup transformasi, terutama semigrup transformasi linier parsial injektif dengan restriksi *range*. Pembahasan utama dalam artikel ini adalah karakterisasi elemen regular dan relasi Green pada semigrup $I(V, Z)$.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Regularitas pada $I(V, Z)$

Semigrup transformasi linear parsial injektif dengan restriksi range bukan merupakan semigrup regular, karena tidak semua elemen dalam semigrup ini adalah elemen regular. Berikut contoh elemen $\alpha \in I(V, Z)$ yang bukan elemen regular.

Contoh 2.1
Misalkan diberikan ruang vektor $Z \subseteq V$, sehingga $V = Z \oplus Z'$ dengan Z' adalah komplemen Z di V. Dibentuk $\alpha \in I(V, Z)$ dengan $dom(\alpha) = Z'$. Untuk setiap $\beta \in I(V, Z)$ diperoleh $dom(\alpha) \cap \beta(V) = \{0\}$. Karena $om(\alpha) \cap \beta(V) = \{0\}$, maka $\alpha\beta = 0$. Dapat diperoleh $\alpha\beta\alpha = (\alpha\beta)\alpha = 0\alpha = 0 \neq \alpha$. Sehingga α bukan elemen regular.

Semigrup transformasi linear parsial injektif dengan restriksi range bukan semigrup regular, oleh karena itu diperlukan syarat tertentu agar elemen dalam semigrup $I(V, Z)$ merupakan elemen regular. Berikut adalah teorema yang menjelaskan syarat perlu dan cukup agar suatu elemen pada $I(V, Z)$ merupakan elemen regular.

Teorema 2.2 (Sanwong & Sommanee, 2008)
Diberikan $\alpha \in I(V, Z)$, maka α elemen regular jika dan hanya jika $dom(\alpha) \subseteq Z$

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui α elemen regular akan dibuktikan $dom(\alpha) \subseteq Z$. Karena α elemen regular, maka terdapat $\beta \in I(V,Z)$ sedemikian hingga $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Misalkan $B_\alpha = \{v_i | i = 1,2,\ldots,n\}$ adalah basis $dom(\alpha)$ dengan $\alpha(v_i) = z_i$ sehingga dapat ditulis

$$\alpha = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ z_2 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}.$$

Untuk setiap $v_i \in B_\alpha$ diperoleh $\alpha(v_i) = \alpha\beta\alpha(v_i) = \alpha\beta(z_i)$, karena α injektif, maka diperoleh $v_i = \beta(z_i) \in Z$. Sehingga terbukti $dom(\alpha) \subseteq Z$.

$\Leftarrow$ Diketahui $dom(\alpha) \subseteq Z$ akan dibuktikan α elemen regular. Misalkan $B_\alpha = \{z_i | i = 1,2,\ldots,n\}$ adalah basis $dom(\alpha)$ dengan $\alpha(z_i) = u_i$ sehingga dapat ditulis

$$\alpha = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ u_2 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}.$$

Dibentuk $\beta \in I(V,Z)$ dengan $dom(\beta) = \alpha(V)$. Karena $om(\alpha) \subseteq Z$, maka dapat dibuat $\beta(u_i) = z_i$ sehingga dapat ditulis

$$\beta = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ z_2 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}.$$

Dapat diperoleh untuk setiap $z_i \in B_\alpha$, $\alpha\beta\alpha(z_i) = \alpha\beta(u_i) = \alpha(z_i)$. Sehingga diperoleh α adalah elemen regular. ■

Berdasarkan teorema di atas, diperoleh setiap $\alpha \in I(V,Z)$ dengan $dom(\alpha) \subseteq Z$ adalah elemen regular. Sehingga dapat dibentuk subsemigrup regular di $I(V,Z)$ yaitu semigrup $I(Z,Z)$ atau dapat ditulis $I(Z)$.

2. Relasi Green pada $I(V,Z)$

Relasi Green adalah relasi yang pertama kali dikemukakan oleh J. A Green dengan mengembangkan konsep dari ideal di semigrup. Untuk itu sebelum membahas relasi Green, sebelumnya akan diberikan lemma tentang ideal

Lemma 3.1 (Sangkhanan & Sanwong, 2014)
Jika ,$\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha = \beta\gamma$ untuk suatu $\gamma \in I(V,Z)$ jika dan hanya jika $\alpha(V) \subseteq \beta(Z)$

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui $\alpha = \beta\gamma$ untuk suatu $\in I(V,Z)$, akan dibuktikan $\alpha(V) \subseteq \beta(Z)$. Dari $\alpha = \beta\gamma$ maka $(V) = \beta\gamma(V) \subseteq \beta(Z)$.

$\Leftarrow$ Diketahui $\alpha(V) \subseteq \beta(Z)$, akan dibuktikan $\alpha = \beta\gamma$ untuk suatu $\gamma \in I(V,Z)$. Dari $\alpha(V) \subseteq \beta(Z)$ maka untuk setiap basis β di Z terdapat $\alpha(v) = \beta(z)$ sehingga dapat di tulis

$\alpha = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z'_1 & \ldots & z'_n \end{pmatrix}$ dan

$$\beta = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n & v'_1 & \cdots & v'_m \\ z'_1 & \ldots & z'_n & \beta(v'_1) & \ldots & \beta(v_m) \end{pmatrix}.$$

Dibentuk γ dengan $dom\,(\gamma) = dom\,(\alpha)$ dan $\gamma(v_i) = z_i$, dapat ditulis

$$\gamma = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z_1 & \ldots & z_n \end{pmatrix}.$$

Jelas $\ker\gamma = \{0\}$, maka $\gamma \in I(V,Z)$. Diperoleh

$$\beta\,\gamma = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n & v'_1 & \cdots & v'_m \\ z'_1 & \ldots & z'_n & \beta(v''_1) & \ldots & \beta(v_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z_1 & \ldots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z'_1 & \ldots & z'_n \end{pmatrix} = \alpha$$

Terbukti $\alpha = \beta\gamma$. ■

Berdasarkan lemma di atas dapat ditarik suatu akibat sebagai berikut

Akibat 3.2
Jika $\alpha \in I(V,Z)$ dan $\beta \in I(Z)$, maka $\alpha = \beta\gamma$ untuk suatu $\gamma \in I(V,Z)$ jika dan hanya jika $\alpha(V) \subseteq \beta(V)$.

Definisi 3.3 (Green, 1951)
Diberikan semigrup S dan sebarang $a,b \in S$, maka $a\,\mathcal{R}\,b$ jika dan hanya jika $aS^1 = bS^1$.

Teorema 3.4 (*Howie, 1995*)
Diberikan sebarang semigrup S dan sebarang $a,b \in S$, maka $a\,\mathcal{R}\,b$ jika dan hanya jika $\exists\, x,y \in S^1$ sedemikian hingga $ax = b$ dan $by = a$.

Bukti

$\Rightarrow$ Diambil sebarang $a,b \in S$ dengan $a\,\mathcal{R}\,b$, artinya $aS^1 = bS^1$. Jika $a = b$, maka terdapat $x = 1 \in S^1$ atau $y = 1 \in S^1$ sehingga $a1 = b$ dan $b1 = b$. Jika $a \neq b$, maka $a = a.1 \in aS^1 = bS^1$ dan $b = b.1 \in bS^1 = aS^1$sehingga terdapat $x,y \in S^1$sehingga $a = by$ dan $ax = b$.

$\Leftarrow$Diketahui terdapat $\exists\, x,y \in S^1$ sedemikian hingga $ax = b$ dan $by = a$. Diambil sebarang $az \in aS^1$, maka $byz \in bS^1$ sehingga $aS^1 \subseteq bS^1$. Sebaliknya diambil sebarang $bw \in bS^1$, maka $bw = axw \in aS^1$ sehingga $bS^1 \subseteq aS^1$, terbukti $aS^1 = bS^1$ artinya $a\,\mathcal{R}\,b$. ■

Dari definisi relasi Green $\mathcal{R}$ di atas dan pengembangan dari lemma ideal kanan, maka diperoleh karakterisasi relasi Green $\mathcal{R}$ pada teorema berikut

Teorema 3.5 (Sangkhanan & Sanwong, 2014)

Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta$ jika dan hanya jika $\alpha,\beta \in I(Z)$ dan $\alpha(V)=\beta(V)$ atau $\alpha,\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $\alpha=\beta$.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta$, akan dibuktikan untuk $\alpha,\beta \in I(Z)$ maka $\alpha(V)=\beta(V)$ atau $\alpha,\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $\alpha=\beta$. Dari $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta$ maka $\alpha=\beta\mu$ dan $\beta=\alpha\omega$ untuk suatu $\mu,\omega \in I(V,Z)$. Jika $\alpha \in I(Z)$ dan $\mu=1$ atau $\omega=1$ diperoleh $\alpha=\beta \in I(Z)$ sehingga $\alpha(V)=\beta(V)$. Jika $\alpha \in I(Z)$ dan $\mu,\omega \in I(V,Z)$, diambil sebarang $z \in dom\,(\beta)$ sehingga diperoleh $\beta(z)=\alpha\omega(z)=\beta\mu\omega(z)$. Karena β injektif diperoleh $z=\mu\omega(z)\in Z$, sehingga $\beta \in I(Z)$. Dari $\alpha=\beta\mu$ berdasarkan Akibat 3.2 diperoleh $\alpha(V)\subseteq\beta(V)$. Sebaliknya dari $\beta=\alpha\omega$, juga diperoleh $\beta(V)\subseteq\alpha(V)$, sehingga $\alpha(V)=\beta(V)$. Untuk $,\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$, andaikan $\mu,\omega \in I(V,Z)$ diambil sebarang $z \in dom\,(\beta)$ sehingga diperoleh $\beta(z)=\alpha\omega(z)=\beta\mu\omega(z)$. Karena β injektif diperoleh $z=\mu\omega(z)\in Z$, sehingga $\beta \in I(Z)$, kontradiksi dengan $\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$, sehingga $\mu=1$ atau $\omega=1$ diperoleh $\alpha=\beta$.

$\Leftarrow$ Diketahui $\alpha,\beta \in I(Z)$ dan $\alpha(V)=\beta(V)$ atau $\alpha,\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $\alpha=\beta$ akan dibuktikan $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta$. Dari $\alpha,\beta \in I(Z)$ dan $\alpha(V)=\beta(V)$, maka berdasarkan Akibat 3.2 jelas bahwa $\alpha=\beta\mu$ dan $\beta=\alpha\omega$ untuk suatu $\mu,\omega \in I(V,Z)$.■

Lemma 3.6 (Chaiya et al., 2019)

Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha=\gamma\beta$ untuk suatu $\gamma \in I(V,Z)$ jika dan hanya jika $dom(\alpha)\subseteq dom(\beta)$.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui $\alpha=\gamma\beta$ untuk suatu $\in I(V,Z)$, diambil sebarang $z \in dom(\alpha)$, maka $\alpha(z)=\gamma\beta(z)$, jadi $z \in dom(\beta)$.

$\Leftarrow$ Diketahui $dom(\alpha)\subseteq dom(\beta)$, maka dapat ditulis

$$\alpha=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & v_{n+1} & \cdots & v_{n+m} \\ z'_1 & \cdots & z'_n & z'_{n+1} & \cdots & z'_{n+m} \end{pmatrix}$$

Dibentuk γ dengan $dom\,(\gamma)=\beta(dom(\,\alpha))$ dan $\gamma(z'_i)=z_i$, dapat ditulis

$$\gamma=\begin{pmatrix} z'_1 & \cdots & z'_n \\ z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}.$$

Jelas $\ker\gamma=\{0\}$, maka $\gamma \in I(V,Z)$. Diperoleh

$$\gamma\beta=\begin{pmatrix} z'_1 & \cdots & z'_n \\ z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & v_{n+1} & \cdots & v_{n+m} \\ z'_1 & \cdots & z'_n & z'_{n+1} & \cdots & z'_{n+m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}=\alpha$$

Terbukti $\alpha=\gamma\beta$. ■

Definisi 3.7 (Green, 1951)

Diberikan semigrup S dan sebarang $a,b \in S$, maka $a\,\mathcal{L}\,b$ jika dan hanya jika $S^1a=S^1b$.

Teorema 3.8 (Howie, 1995)

Diberikan sebarang semigrup S dan sebarang $a,b \in S$, maka $a\,\mathcal{L}\,b$ jika dan hanya jika $\exists\, x,y \in S^1$ sedemikian hingga $xa=b$ dan $yb=a$.

Bukti$\Rightarrow$ Diambil sebarang $a,b \in S$ dengan $a\,\mathcal{L}\,b$, artinya $S^1a=S^1b$. Jika $a=b$, maka terdapat $x=1 \in S^1$ atau $y=1 \in S^1$ sehingga $1a=b$ dan $1b=b$. Jika $a\neq b$, maka $a=1.a \in S^1a=S^1b$ dan $b=1.b \in S^1b=S^1a$, sehingga terdapat $x,y \in S^1$sehingga $a=yb$ dan $xa=b$.

$\Leftarrow$Diketahui terdapat $\exists\, x,y \in S^1$ sedemikian hingga $xa=b$ dan $yb=a$. Diambil sebarang $za \in S^1a$, maka $za=zyb \in S^1b$ sehingga $S^1a\subseteq S^1b$. Sebaliknya diambil sebarang $wb \in S^1b$, maka $wb=wxa \in S^1a$ sehingga $S^1b\subseteq S^1a$, terbukti $aS^1=bS^1$ artinya $a\,\mathcal{L}\,b$. ■

Dari definisi relasi Green $\mathcal{L}$ di atas dan pengembangan dari lemma ideal kiri, maka diperoleh karakterisasi relasi Green $\mathcal{L}$ pada teorema berikut

Teorema 3.9 (Sangkhanan & Sanwong, 2014)

Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$ jika dan hanya jika $dom(\alpha)=dom(\beta)$.

Bukti

$\Rightarrow$ Diketahui $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$, akan dibuktikan $dom(\alpha)=dom(\beta)$. Dari $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$ maka $\alpha=\mu\,\beta$ dan $\beta=\omega\,\alpha$ untuk suatu $\mu,\omega \in I(V,Z)$. Dari Lemma 3.6 diperoleh $\alpha=\mu\,\beta$ maka $dom(\alpha)\subseteq dom(\beta)$, sebaliknya dari $\beta=\omega\,\alpha$, maka $dom(\beta)\subseteq dom(\alpha)$. Terbukti $dom(\alpha)=dom(\beta)$.

$\Leftarrow$ Diketahui $dom(\alpha)=dom(\beta)$ akan dibuktikan $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$. Dari $dom(\alpha)=dom(\beta)$, maka berdasarkan Lemma 3.6 jelas bahwa $\alpha=\mu\beta$ dan $\beta=\omega\,\alpha$ untuk suatu $\mu,\omega \in I(V,Z)$.■

Lemma 3.10 (Sangkhanan & Sanwong, 2014)
Diberikan $,\beta \in I(V,Z)$. Jika $\alpha = \gamma\beta\omega$ untuk suatu $\in I(V,Z), \omega \in I(V,Z)^1$, maka $\dim(\alpha(V)) \leq \dim(\beta(Z))$.
Bukti
Diketahui $\alpha = \gamma\beta\omega$ untuk suatu $\in I(V,Z), \omega \in I(V,Z)^1$, maka $\alpha(V) = \gamma\beta(\omega(V))$

Definisi 3.11 (Green, 1951)
Diberikan semigrup S dan sebarang $a, b \in S$, maka $a\,\mathcal{J}\,b$ jika dan hanya jika $S^1aS^1 = S^1bS^1$.

Dari definisi relasi Green $\mathcal{J}$ di atas dan pengembangan dari Lemma 3.10, diperoleh karakteristik relasi Green $\mathcal{J}$ seperti pada teorema berikut

Teorema 3.12 (Sanwong & Sommanee, 2008)
Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha\,\mathcal{J}\,\beta$ jika dan hanya jika $dom(\alpha) = dom(\beta)$ atau $\dim(\alpha(V)) = \dim(\alpha(Z)) = \dim(\alpha(V)) = \dim(\alpha(Z))$
Bukti
$\Rightarrow$ Diketahui $\alpha\,\mathcal{J}\,\beta$ artinya $\alpha = \mu\beta\omega$ dan $\beta = \mu'\alpha\omega'$ untuk suatu $\mu, \mu', \omega, \omega' \in I(V,Z)^1$. Jika $\omega = 1 = \omega'$, maka $\alpha = \mu\beta$ dan $\beta = \mu'\alpha$ artinya $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$. Sehingga berdasarkan Teorema 3.9 diperoleh $dom(\alpha) = dom(\beta)$. Jika $\omega, \omega' \in I(V,Z)$, $\alpha = \mu\beta\omega$ dan $\beta = \mu'\alpha\omega'$, sehingga berdasarkan Lemma 3.10 diperoleh $\dim(\alpha(V)) \leq \dim(\beta(Z))$ dan $\dim(\beta(V)) \leq \dim(\alpha(Z))$. Sehingga dari dua ketaksamaan tersebut diperoleh $\dim(\alpha(V)) = \dim(\beta(Z)) = \dim(\beta(V)) = \dim(\alpha(Z))$.
$\Leftarrow$ Diketahui $dom(\alpha) = dom(\beta)$ atau $\dim(\alpha(V)) = \dim(\beta(Z)) = \dim(\beta(V)) = \dim(\alpha(Z))$. Dari $dom(\alpha) = dom(\beta)$ diperoleh $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$ sehingga jelas bahwa $\alpha\,\mathcal{J}\,\beta$. Dari $\dim(\alpha(V)) = \dim(\beta(Z))$, maka α dan β dapat ditulis

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} & \dots & v_{n+m} \\ z'_1 & \dots & z'_n & z'_{n+1} & \dots & z'_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Dengan $\{v_i \mid i = 1,2,\dots,n\} \subseteq Z$ dan $v_j \notin Z$ dengan $j = n+1, \dots, n+m$.
Didefinisikan

$$\mu = \begin{pmatrix} z'_1 & \dots & z'_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Jelas $\ker\mu = \{0\}$, dan $\ker\omega = \{0\}$ maka $\mu, \omega \in I(V,Z)$. Diperoleh

$$\mu\beta\omega = \begin{pmatrix} z'_1 & \dots & z'_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} & \dots & v_{n+m} \\ z'_1 & \dots & z'_n & z'_{n+1} & \dots & z'_{n+m} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} = \alpha$$

Diperoleh $\alpha = \mu\beta\omega$. Lebih lanjut dari $\dim(\beta(V)) = \dim(\alpha(Z))$, seperti pada pembentukan μ dan ω di atas, dapat dibentuk μ' dan ω' sehingga diperoleh $\beta = \mu'\alpha\omega'$. Terbukti $\alpha\,\mathcal{J}\,\beta$ ■
Relasi Green $\mathcal{H}$ adalah irisan dari relasi Green $\mathcal{R}$ dan relasi Green $\mathcal{L}$, sehingga karakteristik relasi Green $\mathcal{H}$ diperoleh dari akibat Teorema 3.5 dan Teorema 3.8 sebagai berikut

Akibat 3.13
Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha\,\mathcal{H}\,\beta$ jika dan hanya jika $\alpha, \beta \in I(Z)$, $\alpha(V) = \beta(V)$ dan $dom(\alpha) = dom(\beta)$ atau $\alpha, \beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $\alpha = \beta$.

Teorema 3.14 (Chaiya et al., 2019)
Jika $,\beta \in I(V,Z)$, maka $\alpha\,\mathcal{D}\,\beta$ jika dan hanya jika $\alpha, \beta \in I(Z)$ dan $\dim(dom(\alpha)) = \dim(dom(\beta))$ atau $\alpha, \beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $dom(\alpha) = dom(\beta)$.
Bukti
$\Rightarrow$ Diambil sebarang $\alpha\,\mathcal{D}\,\beta$ artinya terdapat $\gamma \in I(V,Z)$ sedemikian hingga $\alpha\,\mathcal{R}\,\gamma$ dan $\gamma\,\mathcal{L}\,\beta$. Dari $\alpha\,\mathcal{R}\,\gamma$ diperoleh jika $\alpha \in I(Z)$, maka $\gamma \in I(Z)$ dan $\alpha(V) = \gamma(V)$. Dari $\gamma\,\mathcal{L}\,\beta$, maka $\beta \in I(Z)$ dan $dom(\beta) = dom(\gamma)$. Karena α, β, γ injektif, maka diperoleh $\dim(dom(\alpha)) = \dim(\alpha(V)) = \dim(\gamma(V)) = \dim(dom(\gamma)) = \dim(dom(\beta))$. Jika $\alpha \in I(V,Z)\backslash I(Z)$, maka dari Teorema 3.5 diperoleh $\alpha = \gamma$. Dari $\gamma\,\mathcal{L}\,\beta$ jika $\beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ maka $\gamma \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan $dom(\beta) = dom(\gamma) = dom(\alpha)$.
$\Leftarrow$ Diketahui $\alpha, \beta \in I(Z)$ dan $\dim(dom(\alpha)) = \dim(dom(\beta))$, maka dapat ditulis

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \text{ dan } \beta = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ z'_1 & \dots & z'_n \end{pmatrix}$$

Didefinisikan γ dengan definisi sebagai berikut

$$\gamma = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}.$$

Karena $,\beta \in I(Z)$, maka $\gamma \in I(Z)$ dan $\alpha(V) = \gamma(V)$ sehingga $\alpha\,\mathcal{R}\,\gamma$ dan $dom(\beta) = dom(\gamma)$ sehingga $\gamma\,\mathcal{L}\,\beta$. Terbukti bahwa $\alpha\,\mathcal{D}\,\beta$. Jika $\alpha, \beta \in I(V,Z)\backslash I(Z)$ dan

$dom(\alpha) = dom(\beta)$, maka $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta$, jadi terbukti $\alpha\,\mathcal{D}\,\beta$ ■

Contoh 3.15
Diberikan ruang vektor $V = \mathbb{Z}^4$ dan subruang Z di V yaitu

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Diberikan $B_v = \{u_1, u_2, u_3, u_4,\}$ adalah basis pada ruang vektor V, dan $B_v = \{u_1, u_4,\}$ adalah basis pada subruang vektor Z dengan

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh transformasi linear parsial injektif dengan restriksi range sebagai berikut,

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_4 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & \emptyset & u_4 & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & \emptyset & \emptyset & u_4 \end{pmatrix}$$
$$\mu_4 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_4 & u_1 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_5 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & u_1 & u_4 & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_6 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & u_1 & \emptyset & u_4 \end{pmatrix}$$
$$\mu_7 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_4 & \emptyset & u_1 & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_8 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & u_4 & u_1 & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_9 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & \emptyset & u_1 & u_4 \end{pmatrix}$$
$$\mu_{10} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_4 & \emptyset & \emptyset & u_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_{11} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & u_4 & \emptyset & u_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_{12} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & \emptyset & u_4 & u_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_{13} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_{14} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & u_1 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_{15} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & \emptyset & u_1 & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\mu_{16} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & u_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_{17} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_4 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu_{18}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} & \boldsymbol{u_4} \\ \emptyset & \boldsymbol{u_4} & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu_{19}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} & \boldsymbol{u_4} \\ \emptyset & \emptyset & \boldsymbol{u_4} & \emptyset \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu_{20}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} & \boldsymbol{u_4} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \boldsymbol{u_4} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu_{21}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} & \boldsymbol{u_4} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $I(V,Z) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}, \mu_{19}, \mu_{20}, \mu_{21}\}$ dan $I(Z) = \{\mu_3, \mu_{10}, \mu_{13}, \mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{20}, \mu_{21}\}$.

Berdasarkan karakterisasi relasi Green $\mathcal{R}$ $I(V,Z)$ pada Teorema 3.5 diperoleh kelas kelas relasi Green $\mathcal{R}$ sebagai berikut

$\mathcal{R}_{\mu_1} = \{\mu_1\}$
$\mathcal{R}_{\mu_2} = \{\mu_2\}$
$\mathcal{R}_{\mu_3} = \{\mu_3, \mu_{10}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_4} = \{\mu_4\}$
$\mathcal{R}_{\mu_5} = \{\mu_5\}$
$\mathcal{R}_{\mu_6} = \{\mu_6\}$
$\mathcal{R}_{\mu_7} = \{\mu_7\}$
$\mathcal{R}_{\mu_8} = \{\mu_8\}$
$\mathcal{R}_{\mu_9} = \{\mu_9\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{11}} = \{\mu_{11}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{12}} = \{\mu_{12}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{13}} = \{\mu_{13}, \mu_{16}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{14}} = \{\mu_{14}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{15}} = \{\mu_{15}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{17}} = \{\mu_{17}, \mu_{20}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{18}} = \{\mu_{18}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{19}} = \{\mu_{19}\}$
$\mathcal{R}_{\mu_{21}} = \{\mu_{21}\}$

Berdasarkan karakterisasi relasi Green $\mathcal{L}$ $I(V,Z)$ pada Teorema 3.9 diperoleh kelas kelas relasi Green $\mathcal{L}$ sebagai berikut

$\mathcal{L}_{\mu_1} = \{\mu_1, \mu_4\}$
$\mathcal{L}_{\mu_2} = \{\mu_2, \mu_7\}$
$\mathcal{L}_{\mu_3} = \{\mu_3, \mu_{10}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_5} = \{\mu_5, \mu_8\}$
$\mathcal{L}_{\mu_6} = \{\mu_6, \mu_{11}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_9} = \{\mu_9, \mu_{12}\}$

$\mathcal{L}_{\mu_{13}} = \{\mu_{13}, \ \mu_{17}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_{14}} = \{\mu_{14}, \ \mu_{18}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_{15}} = \{\mu_{15}, \ \mu_{19}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_{16}} = \{\mu_{16}, \ \mu_{20}\}$
$\mathcal{L}_{\mu_{21}} = \{\mu_{21}\}$

Berdasarkan karakterisasi relasi Green $\mathcal{H}$ $I(V,Z)$ pada Akibat 3.13 diperoleh kelas kelas relasi Green $\mathcal{H}$ sebagai berikut

$\mathcal{H}_{\mu_1} = \{\mu_1\}$
$\mathcal{H}_{\mu_2} = \{\mu_2\}$
$\mathcal{H}_{\mu_3} = \{\mu_3, \mu_{10}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_4} = \{\mu_4\}$
$\mathcal{H}_{\mu_5} = \{\mu_5\}$
$\mathcal{H}_{\mu_6} = \{\mu_6\}$
$\mathcal{H}_{\mu_7} = \{\mu_7\}$
$\mathcal{H}_{\mu_8} = \{\mu_8\}$
$\mathcal{H}_{\mu_9} = \{\mu_9\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{11}} = \{\mu_{11}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{12}} = \{\mu_{12}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{13}} = \{\mu_{13}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{14}} = \{\mu_{14}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{15}} = \{\mu_{15}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{16}} = \{\mu_{16}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{17}} = \{\mu_{17}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{18}} = \{\mu_{18}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{19}} = \{\mu_{19}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{20}} = \{\mu_{20}\}$
$\mathcal{H}_{\mu_{21}} = \{\mu_{21}\}$

Berdasarkan karakterisasi relasi Green $\mathcal{J}$ $I(V,Z)$ pada Teorema 3.12 diperoleh kelas kelas relasi Green $\mathcal{J}$ sebagai berikut

$\mathcal{J}_{\mu_1} = \{\mu_1, \ \mu_4\}$
$\mathcal{J}_{\mu_2} = \{\mu_2, \ \mu_7\}$
$\mathcal{J}_{\mu_3} = \{\mu_3, \ \mu_{10}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_5} = \{\mu_5, \ \mu_8\}$
$\mathcal{J}_{\mu_6} = \{\mu_6, \ \mu_{11}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_9} = \{\mu_9, \ \mu_{12}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_{13}} = \{\mu_{13}, \ \mu_{16}, \ \mu_{17}, \mu_{20}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_{14}} = \{\mu_{14}, \ \mu_{18}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_{15}} = \{\mu_{15}, \ \mu_{19}\}$
$\mathcal{J}_{\mu_{21}} = \{\mu_{21}\}$

Berdasarkan karakterisasi relasi Green $\mathcal{D}$ $I(V,Z)$ pada Teorema 3.14 diperoleh kelas kelas relasi Green $\mathcal{D}$ sebagai berikut

$\mathcal{D}_{\mu_1} = \{\mu_1, \ \mu_4\}$
$\mathcal{D}_{\mu_2} = \{\mu_2, \ \mu_7\}$
$\mathcal{D}_{\mu_3} = \{\mu_3, \ \mu_{10}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_5} = \{\mu_5, \ \mu_8\}$
$\mathcal{D}_{\mu_6} = \{\mu_6, \ \mu_{11}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_9} = \{\mu_9, \ \mu_{12}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_{13}} = \{\mu_{13}, \ \mu_{16}, \ \mu_{17}, \mu_{20}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_{14}} = \{\mu_{14}, \ \mu_{18}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_{15}} = \{\mu_{15}, \ \mu_{19}\}$
$\mathcal{D}_{\mu_{21}} = \{\mu_{21}\}$

Simpulan

Dari pembahasan di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa elemen $I(V,Z)$, termasuk elemen regular jika dan hanya jika $domain$ termuat dalam Z. Selain itu diperoleh karakterisasi relasi Green $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}, \mathcal{J}$, $\mathcal{D}$ pada semigrup $I(V,Z)$ yaitu dua elemen pada $I(V,Z)$ akan berelasi Green $\mathcal{R}$ jika dan hanya jika dua elemen termasuk dalam $I(Z)$ dan $\alpha(V) = \beta(V)$ atau dua elemen bukan termasuk dalam $I(Z)$ dan $\alpha = \beta$. Dua elemen di semigrup $I(V,Z)$ akan berelasi Green $\mathcal{L}$ jika dan hanya jika domainya sama. Relasi Green $\mathcal{H}$ mempunyai karakteristik dari relasi Green $\mathcal{R}$ dan $\mathcal{L}$

Daftar Pustaka

Chaiya, Y., Pookpienlert, C., & Sanwong, J. (2019). Semigroups of linear transformations with fixed subspaces: Green's relations, ideals and finiteness conditions. *Asian-European Journal of Mathematics*, *12*(4), 1–12. https://doi.org/10.1142/S1793557119500621

Clifford, A.H., dan Preston, G.B., 1961, The Algebraic Theory of Semigroups, American Mathematical Society, Providence.

Green, J. A. (1951). On the Structure of Semigroups. *The Annals of Mathematics*, *54*(1), 163. https://doi.org/10.2307/1969317

Howie, J. M., 1995, Fundamental of Semigroups Theory, Oxford University Press, Inc., Newyork.

Sangkhanan, K., & Sanwong, J. (2012).

PARTIAL ORDERS ON SEMIGROUPS OF PARTIAL TRANSFORMATIONS WITH RESTRICTED RANGE. *86*, 100–118. https://doi.org/10.1017/S0004972712000020

Sangkhanan, K., & Sanwong, J. (2014). Green’s relations and partial orders on semigroups of partial linear transformations with restricted range. *Thai Journal of Mathematics*, *12*(1), 81–93.

Sanwong, J., & Sommanee, W. (2008). Regularity and green’s relations on a semigroup of transformations with restricted range. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2008*. https://doi.org/10.1155/2008/794013

Sullivan, R. P. (2005). *Partial orders on linear transformation semigroups*. 413–437.