REGRESI NEGATIF BINOMIAL BIVARIAT UNTUK MENGATASI OVERDISPERSI REGRESI POISSON BIVARIAT

Wulan Fitriyanti[1],Untung Kurniawan[2]
[1] Badan Pusat Statistik Kabupaten Boyolali
[2] Badan Pusat Statistik Kabupaten Klaten
e-mail : wulanf@bps.go.id

ABSTRAK

Model regresi poisson bivariat digunakan untuk sepasang data count yang berkorelasi. Sama seperti pada model regresi poisson univariat, pada model regresi poisson bivariat juga terjadi overdispersi. Model regresi binomial negatif bivariat merupakan salah satu model yang dapat digunakan saat terjadi overdispersi pada data count. Penelitian ini bertujuan mengkaji estimator parameter dan bentuk statistik uji model regresi binomial negatif bivariat, dan mengetahui faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017. Data yang digunakan adalah data sekunder data jumlah kematian bayi dan ibu di Propinsi Jawa Tengah Tahun 2017 dari Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah. Estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) melalui iterasi Newton-Raphson. Metode pengujian parameter yang digunakan adalah Maximum Likelihood Ratio Test. Pengujian parameter untuk regresi binomial negatif bivariat secara parsial model kematian bayi adalah persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_3), persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X_7) dan persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8). Sedangkan model kematian ibu variabel persentase ibu bersalin mendapat pelayanan kesehatan nifas (X_2) dan persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X_7) signifikan terhadap variabel respon.

Kata Kunci : Kematian Bayi, Kematian Ibu, Regresi Binomial Negatif Bivariat.

PENDAHULUAN

Model regresi data *count* bivariat digunakan ketika kejadian *count* yang secara bersama-sama saling bergantung. Peristiwa *count* berpasangan yang menunjukkan korelasi harus diestimasi secara bersama, dan model regresi *count* bivariat dirancang untuk menangani kasus tersebut [1]. Model regresi poisson bivariat banyak digunakan untuk data bivariat berkorelasi [2]. Sama seperti pada model poisson univariat, model poisson bivariat juga terjadi overdispersi [3]. Saat terjadi overdispersi pada model poisson bivariat menggunakan model binomial negatif bivariat adalah sebagai salah satu alternatif solusi [4].

Dalam penelitian ini, model regresi negatif binomial bivariat menggunakan model Marshall dan Olkin [5]. Model ini juga telah digunakan oleh Gurmu dan Elder [6], yang diperoleh dari campuran gamma dari dua variabel acak Poisson yang independen.

Tujuan penelitian ini adalah mengkaji estimator parameter dan bentuk statistik uji model regresi binomial negatif bivariat, dan mengetahui faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kematian bayi dan kematian ibu di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017.

METODOLOGI PENELITIAN

Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017 [9], variabel respon pada penelitian ini adalah jumlah kematian bayi (Y_1) dan jumlah kematian ibu (Y_2) tahun 2015 tiap kabupaten di Provinsi Jawa Tengah. Variabel bebas pada penelitian ini adalah Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_1), Persentase ibu bersalin mendapatkan pelayanan kesehatan nifas (X_2), Persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_3), Persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_4), Persentase penanganan komplikasi kebidanan (X_5), Persentase penanganan komplikasi neonatal (X_6), Persentase bayi yang diberi ASI eksklusif (X_7), Persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8).

Metode Analisis

Regresi Binomial Negatif Bivariat

Jika Y_{1i} dan Y_{2i} $(i = 1,2,...,n)$ adalah variabel random yang berdistribusi Poisson dengan *means* $\lambda\mu_{1i}$ dan $\lambda\mu_{2i}$ ketika λ adalah konstan, dimana λ juga merupakan variabel random yang mewakili heterogenitas yang tidak teramati yang mengikuti *Gamma* (τ^{-1}, τ^{-1}). Dalam kasus ini, distribusi probabilitas gabungan tanpa syarat dari Y_{1i} dan Y_{2i} bisa diperoleh dari:

$$f(y_{1i}, y_{2i}) = \frac{\Gamma(\tau^{-1} + y_{1i} + y_{2i})}{\Gamma(\tau^{-1})\Gamma(y_{1i}+1)\Gamma(y_{2i}+1)} \mu_{1i}^{y_{1i}} \mu_{2i}^{y_{2i}} \tau^{-\tau^{-1}} (\tau^{-1} + y_{1i} + y_{2i})^{-(\tau^{-1} + y_{1i} + y_{2i})} \quad (1)$$

dimana $\tau(\geq 0)$ adalah parameter dispersi yang diasumsikan tidak bergantung pada kovariat.

Distribusi probabilitas pada persamaan (1), dinotasikan dengan $(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim BNB(\mu_{1i}, \mu_{2i}, \tau)$. Untuk membuat model yang memiliki varians lebih besar dengan mean yang sama sebelum digabung, menggunakan distribusi gamma satu parameter, $Gamma(\tau^{-1}, \tau^{-1})$, untuk distribusi λ. Penggabungan ini telah umum digunakan dalam data hitungan univariat; Dean and Lawless [7], and Gurmu [8]. Pada persamaan (1), diasumsikan bahwa kedua μ_{1i} dan μ_{2i} memiliki bentuk fungsi mean eksponensial:

$$\mu_{1i} = \exp(\mathbf{x}_{1i}^T \boldsymbol{\beta}_1), \qquad \mu_{2i} = \exp(\mathbf{x}_{2i}^T \boldsymbol{\beta}_2) \quad (2)$$

dimana $\mathbf{x}_{1i}$ dan $\mathbf{x}_{2i}$ adalah $k_1 \times 1$ dan $k_2 \times 1$ vektor variabel penjelas, dan $\boldsymbol{\beta}_1$ and $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah $k_1 \times 1$ dan $k_2 \times 1$ vektor parameter yang tidak diketahui. Pada persamaan (1), nilai harapan, varians dan koefisien korelasi dari (Y_{1i}, Y_{2i}) dapat diperoleh dari:

$$E(Y_{ki}) = \mu_{ki} \; ; (k = 1,2)$$

$$Var(Y_{ki}) = \mu_{ki}(1 + \tau\mu_{ki}) \; ; (k = 1,2)$$

$$Corr(Y_{1i}, Y_{2i}) = \sqrt{\frac{\mu_{1i}\mu_{2i}\tau^2}{(1+\mu_{1i}\tau)(1+\mu_{2i}\tau)}} \quad (3)$$

Dari persamaan (3), heterogenitas yang tidak teramati menghasilkan korelasi dan overdispersi pada dua variabel dependen. Jika $\tau \to 0$, maka model BNB dalam persamaan (1) mengurangi produk dua distribusi Poisson independen dan dengan demikian korelasi keduanya variabel dependen bisa nol.

Langkah-langkah dalam melakukan analisis dengan regresi binomial negatif bivariat adalah sebagai berikut:

1. Melakukan estimasi parameter regresi binomial negatif bivariat.
2. Melakukan pengujian parameter secara serentak dan parsial.
3. Melakukan pengujian parameter overdispersi untuk regresi binomial negatif bivariat.
4. Melakukan interpretasi model yang didapatkan.l.

Pengolahan regresi binomial negatif bivariat menggunakan *Software* R versi 2.15.0.

HASIL PENELITIAN

Estimasi Parameter Regresi Binomial Negatif Bivariat

Metode penaksiran yang digunakan dalam regresi Regresi Binomial Negatif Bivariat ini adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan fungsi *likelihood*-nya sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\tau)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(\tau^{-1}+y_{1i}+y_{2i})}{\Gamma(\tau^{-1})\Gamma(y_{1i}+1)\Gamma(y_{2i}+1)}\mu_{1i}^{y_{1i}}\mu_{2i}^{y_{2i}}\tau^{-\tau^{-1}}(\tau^{-1}+y_{1i}+y_{2i})^{-(\tau^{-1}+y_{1i}+y_{2i})}\right) \quad (2)$$

dengan fungsi Gamma sebagai berikut:

$$\frac{\Gamma(\tau^{-1}+y_{1i}+y_{2i})}{\Gamma(\tau^{-1})}=\prod_{k=1}^{y1i+y2i}\left(y_{1i}+y_{2i}+\tau^{-1}-k\right)$$

Kemudian fungsi *likelihood* tersebut diubah dalam bentuk logaritma natural menjadi:

$$Q=\ln L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{y_{1i}+y_{2i}}\ln(y_{1i}+y_{2i}+\tau^{-1}-k)+y_{1i}\ln\mu_{1i}+y_{2i}\ln\mu_{2i}-\ln\tau/\tau\right.$$
$$\left.-(\tau^{-1}+y_{1i}+y_{2i})\ln(\tau^{-1}+\mu_{1i}+\mu_{2i})-\ln(y_{1i}!)-\ln(y_{2i}!))\right] \quad (4)$$

turunan pertama logaritma fungsi *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_{1i}-\mu_{1i}\right)\mathbf{x}_{1i}^{T}}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}\right] \quad (5)$$

turunan pertama logaritma fungsi *likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_{2i}-\mu_{2i}\right)\mathbf{x}_{2i}^{T}}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}\right] \quad (6)$$

turunan pertama logaritma fungsi *likelihood* terhadap parameter dispersi τ adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{y_{1i}+y_{2i}}\left(\frac{\left(y_{1i}+y_{2i}-k\right)}{\left(1+\tau y_{1i}+\tau y_{2i}-\tau k\right)}\right)+\frac{\ln\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}{\tau^2}-\frac{\left(\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}{\tau}\right] \quad (7)$$

turunan parsial kedua $\left(\partial^2 Q/\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\right)$ dari logaritma fungsi *likelihood* adalah:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{\mathbf{x}_{1i}\mathbf{x}_{1i}^T\mu_{1i}}{\left(\tau^{-1}+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}-\frac{\left(\left(y_{1i}-\mu_{1i}\right)\mathbf{x}_{1i}\mathbf{x}_{1i}^T\mu_{1i}\tau\right)}{\left(\tau^{-1}+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)^2}\right)\right] \quad (8)$$

turunan kedua $\left(\partial^2 Q/\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^{\mathbf{T}}\right)$ dari logaritma fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{\mathbf{x}_{2i}\mathbf{x}_{2i}^T\mu_{2i}}{\left(\tau^{-1}+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}-\frac{\left(\left(y_{2i}-\mu_{2i}\right)\mathbf{x}_{2i}\mathbf{x}_{2i}^T\mu_{2i}\tau\right)}{\left(\tau^{-1}+\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)^2}\right)\right] \quad (9)$$

turunan parsial kedua $\left(\partial^2 Q/\partial\tau^2\right)$ dari logaritma fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\tau^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{y_{1i}+y_{2i}}\left(-\frac{\left(y_{1i}+y_{2i}-k\right)^2}{\left(1+\tau y_{1i}+\tau y_{2i}-\tau k\right)^2}\right)\right.$$

$$-\frac{\left(\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}{\tau^2\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}$$
$$\left.+\frac{2\ln\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}{\tau^3}+\left(\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)\right] \quad (10)$$

turunan kedua $\left(\partial^2 Q / \partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T\right)$ dari logaritma fungsi *likelihood* sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(y_{1i}-\mu_{1i}\right)\mathbf{x}_{2i}\mathbf{x}_{1i}^T\mu_{2i}\tau}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)^2}\right] \quad (11)$$

turunan kedua $\left(\partial^2 Q / \partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T\right)$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(y_{2i}-\mu_{2i}\right)\mathbf{x}_{1i}\mathbf{x}_{2i}^T\mu_{1i}\tau}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)^2}\right] \quad (12)$$

turunan parsial kedua logaritma fungsi *likelihood* terhadap parameter regresi $\boldsymbol{\beta}_j$ dan parameter dispersi τ adalah:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(y_{1i}-\mu_{1i}\right)\mathbf{x}_{1i}^T\left(\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)^2}\right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \tau}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\left(y_{2i}-\mu_{2i}\right)\mathbf{x}_{2i}^T\left(\mu_{1i}+\mu_{2i}\right)}{\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)^2}\right] \quad (14)$$

turunan parsial kedua logaritma fungsi *likelihood* terhadap parameter dispersi τ dan parameter regresi $\boldsymbol{\beta}_j$ adalah:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_{1i}\mathbf{x}_{1i}^T\tau}{\tau^2\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}-\frac{\mu_{1i}\mathbf{x}_{1i}^T}{\tau}\right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_{2i}\mathbf{x}_{2i}^T\tau}{\tau^2\left(1+\tau\mu_{1i}+\tau\mu_{2i}\right)}-\frac{\mu_{2i}\mathbf{x}_{2i}^T}{\tau}\right] \quad (16)$$

Karena hasil estimasi parameter pada persamaan di atas tidak memberikan suatu persamaan yang eksplisit maka digunakan suatu metode yaitu metode *Newton-Rapshon* dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\mathbf{0})}$ dengan $\boldsymbol{\theta}=\left(\tau\ \boldsymbol{\beta}_1^{\mathbf{T}}\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathbf{T}}\right)^T$, iterasi pada saat $m=0$. Nilai taksiran awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{j}(\mathbf{0})}$ diperoleh dengan metode *Ordinary Least square* (OLS), yaitu:
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{j}(\mathbf{0})}=\left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\right)^{-\mathbf{1}}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}_{\mathbf{j}}\right) \text{ dengan } j = 1,2.$$
2. Membentuk vektor gradien **g**
$$\mathbf{g}^T\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)_{(2k+3)x1}=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \tau}\right),\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)^T,\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)^T\right)^T_{\theta=\theta_{(m)}}$$
3. Membentuk matriks Hessian **H**
$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_{(m)}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \tau^2} & \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \tau \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \tau \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ & \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}} \\ \textit{simetris} & & \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(m)}$$
4. Memasukkan nilai ke dalam $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\mathbf{0})}$ elemen-elemen vektor **g** dan matriks **H**, sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\mathbf{0})})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\mathbf{0})})$.
5. Mulai dari m = 0 dilakukan iterasi pada persamaan
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{j}(m+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{j}(m)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$$
Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-m.
6. Jika belum mendapatkan penaksiran parameter yang konvergen , maka dilanjutkan kembali ke langkah 5 hingga iterasi ke m = m+1. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_m\right\|\leq\varepsilon$, dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil.

Pengujian Parameter Regresi Binomial Negatif Bivariat

Untuk menentukan nilai statistik uji, terlebih dahulu ditentukan dua buah fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$, yaitu nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan statistik uji dalam pengujian parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dinotasikan dengan :

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\ln\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right)$$

$$= 2(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega}))$$

Hipotesis yang digunakan adalah :

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{jl} = 0\ ; j = 1, 2$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jl} \neq 0$

$\beta_{jl} \neq 0; j = 1, 2; l = 1, 2, ..., \mathrm{k}$

$$z = \frac{\hat{\beta}_{jl}}{se(\hat{\beta}_{jl})} \quad (18)$$

Kriteria Uji: H_0 ditolak jika |z hitung| lebih besar dari $z_{\alpha/2}$.

Uji signifikasi parameter dispersi dengan menggunakan uji *Score test* [10] dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0: $\tau = 0$

H_1: $\tau > 0$

Statistik Uji:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_{1i} + Y_{2i} - \hat{\mu}_{1i} - \hat{\mu}_{2i}\right)^2 - \left(Y_{1i} + Y_{2i}\right)\right]}{\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_{1i} + \hat{\mu}_{2i}\right)^2}} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 2\Bigg[\Bigg(&\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{y_{1i}+y_{2i}} \ln(y_{1i} + y_{2i} + \hat{\tau}^{-1} - k) + \sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}(\mathbf{x}_{1i}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + y_{2i}(\mathbf{x}_{2i}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)\right) - \\ &\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}^{-1} + y_{1i} + y_{2i})\ln(\hat{\tau}^{-1} + \exp(\mathbf{x}_{1i}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + \exp(\mathbf{x}_{2i}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)) - \sum_{i=1}^{n}\left(\ln(y_{1i}!) + \ln(y_{2i}!)\right)\Bigg) - \\ \Bigg(&\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{y_{1i}+y_{2i}} \ln(y_{1i} + y_{2i} + \hat{\tau}^{-1} - k) + \sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}(\hat{\beta}_{10}) + y_{2i}(\hat{\beta}_{20})\right) - \\ &\sum_{i=1}^{n}(\hat{\tau}^{-1} + y_{1i} + y_{2i})\ln(\hat{\tau}^{-1} + \exp(\hat{\beta}_{10}) + \exp(\hat{\beta}_{10})) - \sum_{i=1}^{n}\left(\ln(y_{1i}!) + \ln(y_{2i}!)\right)\Bigg)\Bigg] \end{aligned} \quad (17)$$

$D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ adalah devians model regresi binomial negatif bivariat dengan menggunakan pendekatan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas *v* dan H_0 ditolak jika $D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) > \chi^2_{(\alpha;v)}$, dengan *v* adalah derajat bebas yang diperoleh dari banyaknya parameter model di bawah populasi dikurangi banyaknya parameter di bawah H_0.

Uji signifikasi individu variabel prediktornya dengan menggunakan uji *Wald* dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{jl} = 0$

$H_1 : \beta_{jl} \neq 0;\ j = 1,2; l = 1,2,...,k$

Statistik Uji:

Kriteria uji: H_0 ditolak jika nilai statitik uji $T > \chi^2_{\alpha,1}$.

Pemodelan Regresi Binomial Negatif Bivariat Jumlah Kematian Bayi dan Jumlah Kematian Ibu di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017

Pengujian parameter secara serentak, hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut :

$H_0 : \beta_{j1} = \beta_{j2} = ... = \beta_{j8} = 0\ ; j = 1, 2$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{jl} \neq 0$

dimana $j = 1, 2;\ l = 1, 2, ..., 8$

diperoleh nilai $D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ sebesar 3454,82 dengan tingkat signifikansi sebesar 5% yang menghasilkan $\chi^2_{(0,05;17)}$ = 27,587 karena nilai $D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ lebih besar dari nilai χ^2

maka tolak H_0 yang artinya minimal ada satu variabel yang berpengaruh terhadap variabel respon. Selanjutnya akan dilakukan pengujian parameter secara parsial.

Tabel 1. Penaksiran Parameter Regresi Binomial Negatif Bivariat pada Kematian Bayi dan Kematian Ibu di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017

Para meter	kematian bayi (μ_1)		
	Taksiran	SE	Z Hitung
β_0	14,890	5,364	2,776
β_1	0,024	0,051	0,462
β_2	-0,044	0,024	-1,809
β_3	-0,080	0,030	-2,638*
β_4	0,013	0,024	0,536
β_5	-0,007	0,004	-1,947
β_6	0,007	0,007	1,007
β_7	-0,010	0,003	-3,006*
β_8	-0,016	0,008	-2,020*
Para meter	kematian ibu (μ_2)		
	Taksiran	SE	Z Hitung
β_0	9,829	6,570	1,496
β_1	0,035	0,063	0,546
β_2	-0,057	0,029	-2,006*
β_3	-0,057	0,037	-1,523
β_4	0,033	0,029	1,105
β_5	-0,004	0,005	-0,933
β_6	-0,006	0,009	-0,641
β_7	-0,009	0,004	-2,077*
β_8	-0,018	0,010	-1,830

Berdasarkan nilai dari Tabel 1 dengan tingkat signifikansi sebesar 5% bahwa ada tiga variabel prediktor yang memiliki nilai Z hitung yang lebih besar daripada Z tabel ($\alpha/2$ = ±1,96) pada model persamaan kematian ibu dan dua variabel pada model persamaan kematian ibu.

Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian bayi adalah persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_3), persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X_7) dan persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X_8). Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu adalah persentase ibu bersalin mendapat pelayanan kesehatan nifas (X_2) dan persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X_7).

Sehingga dari hasil semua penaksiran parameter di peroleh model sebagai berikut :

$$\hat{\mu}_1 = \exp\big(14,89 + 0,024X_1 - 0,044X_2 - \\ -0,080X_3 + 0,013X_4 - 0,007X_5 \\ +0,007X_6 - 0,010X_7 - 0,016X_8\big)$$

$$\hat{\mu}_2 = \exp\big(9,829 + 0,035X_1 - 0,057X_2 \\ -0,057X_3 + 0,033X_4 - 0,004X_5 \\ -0,006X_6 - 0,009X_7 - 0,018X_8\big)$$

Pada kasus kematian bayi, setiap penambahan 1% jumlah ibu hamil melaksanakan program K4 maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar exp(-0,08)= 0,92 kali dari rata-rata jumlah kematian bayi semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah bayi yang diberi asi eksklusif maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kematian bayi sebesar exp(-0,01)= 0,98 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah rumah tangga yang berperilaku hidup bersih dan sehat maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kematian bayi sebesar exp(-0,016)= 0,98 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model.

Pada kasus kematian ibu, setiap penambahan 1% jumlah ibu bersalin mendapat pelayanan kesehatan nifas maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kasus kematian ibu sebesar exp(-0,057)= 0,94 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah bayi yang diberi asi ekslusif maka akan melipatgandakan rata-rata jumlah kematian ibu sebesar exp(-0,009)= 0,99 kali dari rata-rata jumlah kematian ibu semula jika variabel lain tidak dilibatkan dalam model.

Pengujian parameter dispersi menggunakan statistik *Score Test* untuk menguji overdispersi pada model regresi binomial negatif bivariat.

Tabel 2 Pengujian Parameter Dispersi dengan *Score Test*

Parameter	Penaksiran	T
τ	0,129	81,18956

Hipotesis untuk parameter dispersi

$H_0 : \tau = 0$

$H_1 : \tau > 0$

diperoleh nilai T sebesar 81,18956 dengan tingkat signifikansi sebesar 5% yang menghasilkan $\chi^2_{(0,05;1)} = 3,841$ karena nilai T lebih besar dari χ^2 maka tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan bawah terjadi fenomena overdispersi pada kematian bayi dan kematian ibu di Jawa Tengah pada tahun 2017.

KESIMPULAN

Estimasi parameter model regresi binomial negatif bivariat menggunakan metode *Maximum Likelihood* menghasilkan estimator parameter yang tidak *close form* sehingga perlu dilakukan dengan metode iterasi *Newton-Raphson*.

Pengujian hipotesis menggunakan metode *Maximum Likelihood Rasio Test* (MLRT) dengan membandingkan nilai antara *likelihood* di bawah H_0 dan *likelihood* dibawah populasi.

Model regresi binomial negatif bivariat, variabel yang signifikan pada persamaan kematian bayi persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X3), persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X7) dan persentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat (X8). Sedangkan pada kematian ibu variabel yang signifikan adalah persentase ibu bersalin mendapat pelayanan kesehatan nifas (X2) dan persentase bayi yang diberi asi eksklusif (X7).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chou N, Steenhard D. *Bivariate Count Data Regression Models – A SAS® Macro Program*, Proceedings SAS Global Forum 2011, Paper 355-2011.

[2] Holgate P. Estimation for the bivariate Poisson distribution. *Biometrika 1964*; 51,p. 241-245.

[3] Cameron, A.C. dan Johansson, P. (1998), *Bivariate Count Data Regression using Series Expansions: with Applications*, Department of Economics Discussion Paper, University of California, Davis.

[4] Famoye, F. (2010), "On the bivariate negative binomial regression model". *Journal of Applied Statistics* ,Vol 37, No. 6, hal 969-981.

[5] Marshall, A. W., dan Olkin, I. (1990), "Multivariate distributions generated from mixtures of convolution and product families". In H. W. Block, A. R. Sampson, & T. H. Savits (Eds.), IMS Lecture notes monograph series: Vol. 16. *Topics in statistical dependence* 1990, pp. 372-393.

[6] Gurmu, S. dan Elder, J. (2000), "Generalized bivariate count data regression models", *Economics Letter*. 68 (2000), pp. 31–36.

[7] Dean C, Lawless F. Tests for detecting overdispersion in Poisson regression models. *Journal of the American Statistical Association* 1989, 84, p. 467-472.

[8] Gurmu S. Tests for detecting overdispersion in the positive Poisson regression model. *Journal of Business and Economic Statistics.*1991, 9, p. 215-222.

[9] Dinas Kesehatan Propinsi Jawa Tengah, (2017), *Profil Kesehatan Propinsi Jawa Tengah,* Semarang, Dinkes Jateng.

[10] Cheon, S. , Song, S.H. dan Jung, B.C. (2009), "Tests for independence in a bivariate negative binomial model", *Journal of the Korean Statistical Society,* vol. 38, hal, 185-190.